

## APLICACIÓN DE KRIGING MEDIAN-POLISH SOBRE IMÁGENES DE TEMPERATURA SUPERFICIAL OCEÁNICA

J.A. Triñanes, A. Tobar, I. Sordo y J. Arias  
Laboratorio de Sistemas. Facultad de Física. Campus Sur.

### RESUMEN

En el presente artículo presentamos un método de interpolación de gran potencialidad en el estudio de distribuciones espaciales de medidas, denominado "kriging", aplicado en imágenes SST. Con objeto de mejorar los resultados obtenidos y aliviar la tremenda carga computacional del proceso se describe la variante "median-polish".

### INTRODUCCIÓN

El principal factor que afecta al estudio de los ecosistemas terrestres desde plataformas situadas en el espacio con sensores ópticos y/o térmicos es la cobertura nubosa. Esto da lugar a que en la inmensa mayoría de los casos una imagen SST debidamente procesada muestre los signos inequívocos de trazas nubosas que impiden extraer información acerca de la superficie oceánica situada por debajo. Se han desarrollado diversos algoritmos para identificar los pixels contaminados y eliminarlos del proceso de cálculo de las temperaturas. Pero en ocasiones, el factor de calidad de la imagen es muy bajo o, lo que es más importante, la información presente en las zonas descubiertas no proporciona indicios claros de la distribución térmica en las zonas nubosas. Se requiere entonces el empleo de algún método que nos permita interpolar y completar la imagen. Las técnicas tradicionales de interpolación (distancia inversa, función núcleo bidimensional gaussiano, triangulación, medias locales,...) no aprovechan toda la información espacial presente en la imagen. Este punto es de gran importancia en teledetección y ha sido el factor fundamental que nos ha decantado por el empleo de técnicas de predicción espacial, más en concreto por la aplicación del kriging en nuestro análisis.

### MÉTODO

El término "kriging" procede de Nanie Krige, quien fue el primero en formular e implementar este tipo de interpolación en la década de los 50 para su empleo en la minería del oro en Suráfrica. Esta técnica presenta una serie de características que lo distinguen de los métodos tradicionales de interpolación. Primero, el kriging puede estimar

un valor que es bien mayor o menor que cualquiera de los valores de entrada. Segundo, mientras los métodos tradicionales emplean la distancia Euclídea como factor de escala, el kriging emplea tanto la distancia como la geometría entre puntos. Por último, el kriging intenta minimizar la varianza del error estimado. Esta claro que este valor no es nunca conocido, pero el kriging aplica un modelo de función aleatoria de probabilidad de los valores conocidos [1].

Supongamos que  $\{T(\mathbf{x})/\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^2\}$  es un proceso aleatorio que podemos descomponer de la forma  $T(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x})$ , donde  $\mu(\mathbf{x})$  representa la tendencia o variación a gran escala de los datos y  $\delta(\mathbf{x})$  es el componente local espacialmente correlacionado.

Dependiendo de las suposiciones acerca del modelo de proceso aleatorio  $T(\mathbf{x})$  que hagamos podemos distinguir diversos tipos de kriging. Los más importantes son el kriging ordinario, el simple, el kriging universal y el median-polish. En el caso del kriging simple, se considera que el componente de gran escala es una constante.

Generalizando, el término  $\mu(\mathbf{x})$  puede asumirse como una incógnita, como en el kriging ordinario, o modelado polinomialmente, como en el kriging universal. En el kriging median-polish suponemos que  $\mu(\mathbf{x})$  se descompone en componentes direccionales, esto es, parametrizamos la media como en el kriging universal. Estimamos la media y la eliminamos de los datos, obteniendo lo que denominamos residuos, sobre los que aplicamos kriging ordinario. Esta última modalidad de interpolación es la que vamos a implementar por varias razones: tanto el kriging universal como el median-polish tienen un comportamiento parecido y proporcionan resultados similares, por lo general superiores a las otras dos modalidades; sin embargo, el kriging median-polish es más resistente a valores anormales en los datos y el tiempo necesario para obtener resultados es muy superior para el kriging universal [2].

### ALGORITMO MEDIAN-POLISH

En esta modalidad de kriging asumimos que,  
 $\mu(\mathbf{x}) = a + c(x) + d(y)$ ,  $\mathbf{x} = (x, y) \in D$ .

Consideremos una imagen de  $n$  filas y  $m$  columnas. En este caso, el algoritmo de eliminación de la media de los datos consiste básicamente en seguir los siguientes pasos:

a) Creamos  $n+m+1$  puntos más a la imagen de valor 0. Esto es, añadimos a la imagen original una fila y una columna formadas por un elemento más que las de partida. A continuación sigue un proceso de iteración que finaliza cuando los puntos permanecen inalterados dentro de una tolerancia predefinida.

b) Para las iteraciones impares (considerando  $T_{kl}$  el valor de la imagen en el punto  $(k,l)$ ):

$$T_{kl}^{(i)} = T_{kl}^{(i-1)} - \text{mediana}(T_{kl}^{(i-1)}; k = 0, \dots, m-1)$$

,  $k = 0, \dots, m-1, l = 0, \dots, n$

$$T_{ml}^{(i)} = T_{ml}^{(i-1)} + \text{mediana}(T_{kl}^{(i-1)}; k = 0, \dots, m-1)$$

,  $l = 0, \dots, n$

c) Para las iteraciones pares:

$$T_{kl}^{(i)} = T_{kl}^{(i-1)} - \text{mediana}(T_{kl}^{(i-1)}; l = 0, \dots, n-1)$$

,  $k = 0, \dots, m, l = 0, \dots, n-1$

$$T_{kn}^{(i)} = T_{kn}^{(i-1)} + \text{mediana}(T_{kl}^{(i-1)}; l = 0, \dots, n-1)$$

,  $k = 0, \dots, m$

De esta manera, la imagen original la sustituimos por una imagen de residuos y por  $n+m+1$  puntos extra que contiene los valores estimados de los efectos fila ( $f$ ), columna ( $c$ ) y el efecto total  $a$ , que vendrían dados por:

$$f_l \equiv T_{ml}^{(\infty)}, \quad l = 0, \dots, n-1$$

$$c_k \equiv T_{kn}^{(\infty)}, \quad k = 0, \dots, m-1$$

$$a \equiv T_{mn}^{(\infty)}$$

de tal manera que,

$$T(x, y) = a + f_l + c_k + R(x, y)$$

donde  $R(x, y)$  son los residuos o valores finales

$$T_{xy}^{(\infty)}$$

Sobre el conjunto de residuos obtenidos por el algoritmo median-polish aplicamos el kriging ordinario[3].

### KRIGING ORDINARIO

En el kriging ordinario, el valor estimado es una combinación lineal ponderada de los datos

disponibles. Así, para  $n$  datos de temperatura conocidos en las posiciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la temperatura esperada del punto  $x_o$  viene dada por [3],

$$\hat{T}_o = \sum_{i=1}^n w_i T_i \quad (i)$$

con el requisito adicional,

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (ii)$$

Esta última condición garantiza que el valor estimado sea uniformemente insesgado.

La aproximación estadística para resolver este problema es modelar los datos disponibles y las estimaciones que no conocemos como los resultados de un proceso estacionario aleatorio. Definimos el error medio esperado  $R$  como,

$$R = E\left[\hat{T}_o - T_o\right] = E\left[\sum_{i=1}^n w_i T_i - T_o\right]$$

La varianza de la estimación viene dada por,

$$\sigma_E^2 = E\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i T_i - T_o\right)^2\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j c_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n w_i c_{io} + c_{oo}$$

donde  $c_{ij} = \text{covarianza}(T_i, T_j)$ .

Para minimizar  $\sigma_E^2$  hacemos las primeras  $n$  derivadas parciales respecto a  $w_i$  iguales a cero. De este modo obtenemos un conjunto de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas. Pero debido a la condición (ii) tenemos que emplear la técnica del multiplicador de Lagrange para resolver el sistema,

$$\sigma_E^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j c_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n w_i c_{io} + c_{oo} + 2\mu \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right)$$

donde  $\mu$  es el multiplicador de Lagrange.

Tomando ahora la primera derivada parcial de  $\sigma_E^2$  respecto a cada uno de los pesos y  $\mu$  e

igualando a cero, obtenemos la ecuación siguiente,

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{D}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{10} \\ \vdots \\ c_{n0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo,

$$w = C^{-1} D$$

De esta manera obtenemos los pesos que aplicaremos en (i) para la estimación de los valores interpolados.



Figura 1. Imagen original. Las zonas oscuras están cubiertas de nubes.

### IMPLEMENTACIÓN

Sobre la zona de estudio extraemos una imagen SST. Sobre esta imagen de temperaturas aplicamos el algoritmo median-polish hasta que cada interacción modifica los datos de la imagen por debajo de una cierta tolerancia[4].

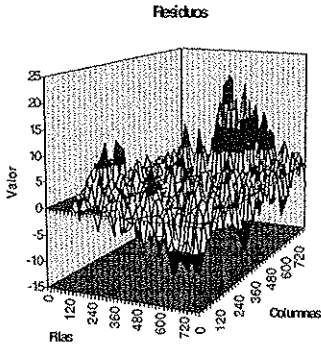


Figura 2. Gráfica de residuos finales después de aplicar median-polish.

Después de la convergencia del algoritmo, el siguiente paso se centra en el cálculo del variograma experimental sobre los obtenidos en el último paso. Este variograma experimental lo calculamos en dos direcciones: vertical y horizontal. El objetivo es evaluar la anisotropía geométrica existente de manera rápida. La anisotropía geométrica tiene variaciones para una distancia  $h$  en una dirección que son las mismas que las variaciones para una distancia  $kh$  en otra.

Variograma Experimental

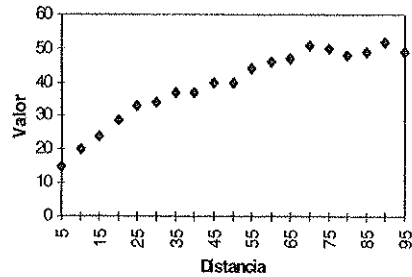


Figura 3. Variograma Experimental de los residuos.

El variograma experimental es el variograma obtenido de los datos y es una estimación del variograma local, definido por el tamaño de la zona de interpolación cubierta por las muestras. La ecuación para el cálculo del variograma experimental viene dada por,

$$\gamma(h) = \frac{1}{|n(h)|} \sum_{n(h)} (T_i - T_j)^2$$

donde  $n(h)$  está formado por todos los pares diferentes separados por una distancia  $h$  y  $|n(h)|$  es el número de pares en  $n(h)$ . Finalmente,  $T_i$  es la temperatura en el punto  $i$  de la imagen.

El modelo que vamos a emplear es el esférico, de amplia difusión, y a este modelo ajustamos el variograma experimental. Este modelo viene dado por,

$$\gamma(h) = \begin{cases} c_0 + c_1 \left( 1.5 \frac{h}{a} - 0.5 \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right) & h \leq a \\ c_0 + c_1 & h > a \end{cases}$$

Para el caso de este modelo, la anisotropía geométrica tiene el efecto de que los dos variogramas tendrán el mismo umbral pero

diferentes rangos, a partir de los cuales podemos extraer la constante  $k$  descrita más arriba.

Para todo variograma se verifica que  $\gamma(0) = 0$ , pero puede darse el caso de que  $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = c_0 > 0$ , produciéndose una discontinuidad en el origen del variograma. En ese caso  $c_0$  se denomina "efecto nugget" o "pepita" y puede indicar errores en las medidas o bien representar el umbral de un componente de microescala cuyo rango es mucho menor que el intervalo de muestreo. Si el variograma verifica que  $\lim_{|h| \rightarrow \infty} \gamma(h) = \sigma^2$ , se dice que ha alcanzado un umbral ("sill"), que teóricamente es la varianza de las muestras. El factor  $c_1 = \sigma^2 - c_0$  recibe el nombre de umbral parcial.

La distancia a la que el variograma alcanza el umbral se denomina rango, simbolizado por  $a$ . El rango es la distancia a la que la covarianza es igual a 0 y por lo tanto marca el límite de la zona de influencia de una sola muestra. Más allá del rango, las muestras no están correlacionadas y son independientes.

Las tres variables anteriores junto con el modelo de variograma definen completamente a éste.

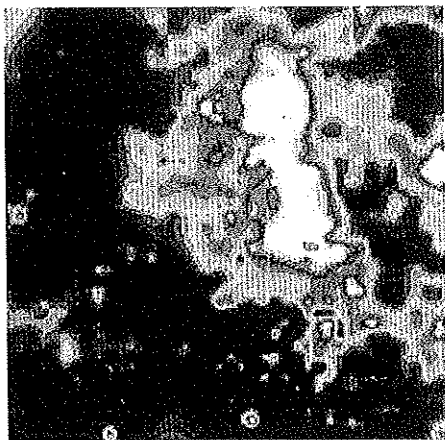


Figura 4. Imagen SST final.

A partir de este último paso es donde podremos aplicar el kriging ordinario sobre los residuos. La imagen final obtenida se muestra en la Figura 4. En la comparación de los histogramas de la imagen original y la interpolada no se aprecian diferencias significativas. La resta de ambas produce otra imagen de histograma

mayoritariamente 0 y con máximos valores de 0.3. La imagen 3 ha sido filtrada para eliminar la posible influencia de las nubes en las temperaturas superficiales que parece apreciarse en la imagen original.

Esta última tarea consume recursos muy valiosos del sistema. A objeto de acelerar la presentación de resultados, tenemos la posibilidad de aplicar el proceso en el supercomputador vectorial del CESGA (Centro de SuperComputación de Galicia). En función de la resolución de la imagen final, podemos también ejecutarlo sobre las máquinas de nuestro laboratorio.

## CONCLUSIÓN

El empleo de las técnicas de kriging y más en concreto de la variante "median-polish" se ha revelado muy útil en Teledetección para la estimación de pixels sin valor previo asociado. Como en otros métodos, está claro que la calidad de los resultados finales dependerá de la cantidad y distribución espacial de los píxeles válidos e inválidos. Este proceso se ha mostrado muy potente en la extracción de temperaturas para zonas cubiertas de nubes. En la actualidad está siendo empleado en nuestro laboratorio para interpolar datos de otra naturaleza diferente.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] R.E. Rossi, J.L. Dungan y L.R. Beck, "Kriging in the Shadows: Geostatistical Interpolation for Remote Sensing", *Remote Sens. Environ.*, 49:32-40 (1994).
- [2] R.F. Casal, *Análisis Estadístico de Datos Espaciales*, Memoria de Licenciatura, Nov. (1995).
- [3] M.R. Inggs y R. Thomas, "Interpolating Satellite Derived Wind Field Data Using Ordinary Kriging, with Applications to the Nadir Gap", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 34:250-256 (1996).
- [4] N.A.C. Cressie, *Statistics for Spatial Data*, John Wiley&Sons, Inc. (1993).