Filtrado de imágenes en el dominio de la frecuencia

C. Pinilla, A. Alcalá y F. J. Ariza
Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodésica y Fotogrametría. Universidad de Jaén.

RESUMEN

El filtrado digital de imágenes se basa en la operación de convolución entre la imagen *y* la función filtro. El cambio de dominio espacial de descripción de la imagen al frecuencial permite sustituir las convoluciones por productos, con claras ventajas para el proceso de cálculo. Además, el filtrado en el dominio de la frecuencia permite mayor flexibilidad al ser posible seleccionar no sólo la dirección de filtrado, sino también los intervalos de frecuencia que requieran ser eliminados.

PALABRAS CLAVE: filtrado Fourier, dominio de la frecuencia

ABSTRACT

Image digital filtering is based on a convolution operation between the base image and the filter function. The change from image spatial domain, which describes a photographical image, into a frequency space allows the substitution of convolution operations by products, which have evident advantages for the computational process. Also, the frequency domain filtering allows a great flexibility, it's possible to select both the filtering direction and the frequency intervals to be eliminated.

KEY WORDS: filtering, Fourier, frequency domain.

NATURALEZA DEL FILTRO DIGITAL

El filtrado digital es una operación de convolución de la imagen original con la función filtro. La operación de convolución entre las funciones f_1 (t) y f_2(t) se define mediante una tercera la función f(t) del siguiente modo:

$$f(\mathrm{t}) = f_1(\mathrm{t}) * f_2(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mathrm{x}) f_2(\mathrm{t-x})\mathrm{dx} \qquad (1)$$

Considerando, en general, una imagen de entrada finita y discreta caracterizada por la función de luminancia z(i,j) -en la cual i,j representan las coordenadas de las celdillas-, una imagen de salida z'(i,j) y un sistema de filtrado W, cuya función de respuesta es w(m,n) -siendo *m,n* las coordenadas matriciales de la función de filtrado, que en general diferirán del sistema de referencia de la imagen-, puede describirse el proceso de filtrado como la siguiente operación de convolución:

$$z'(\mathrm{i,j}) = w(\mathrm{m,n}) * z(\mathrm{i,j}) = \sum_{\mathrm{m=-k}}^{\mathrm{k}} \sum_{\mathrm{n=-l}}^{\mathrm{l}} w(\mathrm{m,n})\ z(\mathrm{i-m,j-n}) \qquad (2)$$

que es la ecuación del filtrado espacial de una imagen digital, donde el operador *w* representa la matriz deslizante de dimensión (2k+1)x(21+ 1) utilizada en el filtrado y donde *i* y j son respectivamente las líneas y columnas de la imagen (Pinilla, 1995). Los elementos $w_{m,n}$ constitutivos de la matriz son denominados coeficientes de peso, y el entorno [-*k*,*k*]x[-*l*,*l*] ventana del filtro. Usualmente *k = l,* es decir, la ventana de filtrado es cuadrada. Así, pues, el filtrado de una imagen mediante la matriz deslizante:

$$\mathrm{w} = \begin{bmatrix} \mathrm{w}_{11} & \mathrm{w}_{12} & \mathrm{w}_{13} \\ \mathrm{w}_{21} & \mathrm{w}_{22} & \mathrm{w}_{23} \\ \mathrm{w}_{31} & \mathrm{w}_{32} & \mathrm{w}_{33} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

dará lugar a una imagen de la forma:

$$\begin{aligned} z'(\mathrm{i,j}) = {} & w_{11}z(\mathrm{i-1,j-1}) + w_{12}z(\mathrm{i-1,j}) + w_{13}z(\mathrm{i-1,j+1}) + \\ & + w_{21}z(\mathrm{i,j-1}) + w_{22}z(\mathrm{i,j}) + w_{23}z(\mathrm{i,j+1}) + \\ & w_{31}z(\mathrm{i+1,j-1}) + w_{32}z(\mathrm{i+1,j}) + w_{33}z(\mathrm{i+1,j+1}) \end{aligned} \qquad (4)$$

A medida que *k* y *l* son mayores, la influencia del entorno de cada celdilla en el nivel digital asignado a la celdilla resultante será progresivamente mayor, modificándose en consecuencia la apariencia de la imagen filtrada. Habitualmente los filtros utilizados son de 3x3 elementos (Figura 1).

FILTROS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

El sistema matricial de coordenadas de una imagen es lo que se denomina dominio espacial. Sin embargo, la misma imagen puede ser considerada como una función no periódica y definirse en otro espacio bidimensional, cuyos ejes vengan determinados por la amplitud y la frecuencia para cada dirección de la imagen. Este nuevo espacio de referencia para la descripción de la imagen se conoce como dominio de la frecuencia.

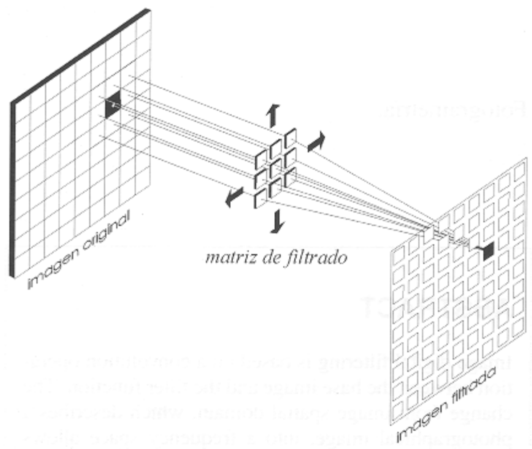

Figura 1. La matriz deslizante de filtrado en el dominio espacial

La transformada de Fourier

Se demuestra (Hsu, 1973) que cualquier función periódica *f(t)* con un período *T,* que sea continua por tramos e integrable sobre cualquier intervalo (condiciones de Dirichlet) , puede representarse mediante la serie de Fourier en forma exponencial compleja:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t} \tag{5}$$

La consistencia de la representación de una función periódica en forma de serie de Fourier se basa en que dicha función queda unívocamente definida mediante la especificación de los coeficientes *c.* de dicha serie. Pues bien, puede demostrarse asimismo que cualquier función *f(t)* no periódica también puede representarse de un modo análogo de la forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{6}$$

siendo esta expresión la representación de Fourier de una función aperiódica, similar a la serie de Fourier de la función periódica (5). La función *F(w)* recibe el nombre de integral de Fourier o transformada de Fourier de la función *f(t)* y puede expresarse:

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{7}$$

En virtud de ello, cualquier función no periódica dada tiene dos modos equivalentes de representación: uno en el dominio del tiempo *f(t)* y otro en el de la frecuencia *F(w).* La representación gráfica de *F(w)* en función de la frecuencia angular w se denomina espectro de magnitud de la función f(t) y permite describirla en el dominio de la frecuencia, es decir, explica la composición de frecuencias de la superposición de diversas funciones simples, de igual forma que la representación de *f(t)* frente a *t* define dicha función en el dominio del tiempo. La expresión (7) permite transformar la función f(t), en el dominio del tiempo, en su equivalente *F(w),* en el dominio de la frecuencia, pudiéndose analizar la primitiva función del tiempo mediante su correspondiente espectro. La expresión (6) invierte el proceso, sintetizando el espectro de frecuencias para obtener de nuevo la función en términos de tiempo.

Si en lugar del tiempo, se considera como variable independiente el espacio, concretamente las sucesivas celdillas de una misma fila de la imagen (Figura 2), el razonamiento anterior no varía substancialmente, y se permite con ello describir la imagen digital en los dominios espacial (la imagen normalmente considerada) y frecuencial (composición de frecuencias de las distintas funciones no periódicas, cuya suma daría lugar a la imagen), para lo cual únicamente es necesario readaptar el concepto de frecuencia, pasando de la tradicional definición de frecuencia temporal a la frecuencia espacial. Ésta no describe otra cosa que el grado de repetitividad de los niveles digitales de una imagen.

Esta exposición sin embargo entraña una simplificación, al estar considerando una función discreta como es la imagen digital en lugar de una continua para la cual se ha definido anteriormente la trans-

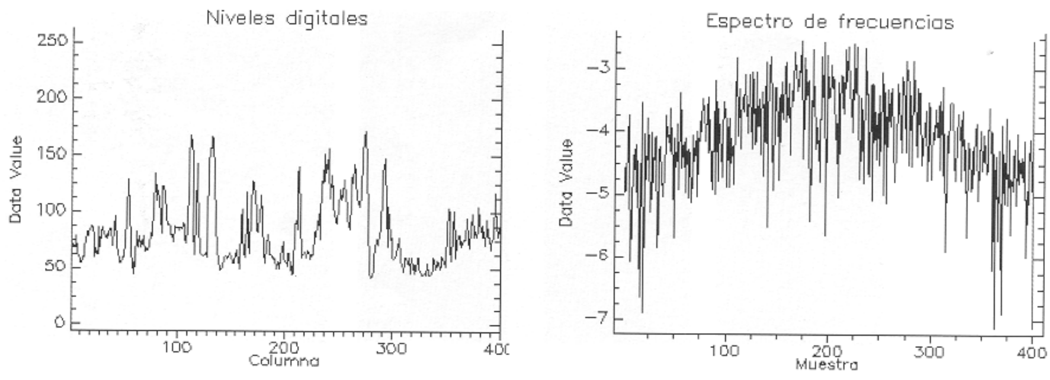

Figura 2. Dominio de la frecuencia en la imagen digital: línea original y transformada de Fourier.

formada de Fourier. Otros desarrollos matemáticos permiten definir una transformada discreta de Fourier (DFT) e incluso algoritmos de aplicación muy sencilla para el cálculo de dicha función (Brigham, 1974), tales como la transformada rápida de Fourier o FFT *(Fast Fourier Transform)*

La imagen digital ϕ es una función bidimensional, finita y discreta. Su transformada de Fourier Φ es una función generalmente compleja que puede describirse así (Pinilla, 1997):

$$\Phi(r,s) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(i,j)\, e^{-i2\pi(ir+js)/K} \qquad (8)$$

que donde *r* y *s* son frecuencias espaciales, *i* y j las líneas y columnas de la imagen original de dimensión *K*x*K.* Puede representarse el espectro de magnitud de F*(r,s)* -esto es, el módulo de su transformada discreta de Fourier situando la celdilla F(0,0) en el centro de la imagen, de tal forma que el pixel central represente el promedio de luminancia de la imagen original (único componente de frecuencia 0). Cuanto más alejada del centro esté una celdilla determinada, el nivel digital que representa entrará a formar parte de la imagen con una frecuencia espacial mayor (Figura 3).

Teorema de la convolución

Si y $\mathfrak{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ y $\mathfrak{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ teniendo en cuenta la expresión de la transformada de Fourier, y en virtud de la definición de convolución, puede demostrarse que:

$$\mathfrak{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)\, F_2(\omega) = \mathfrak{F}[f_1(t)] * \mathfrak{F}[f_2(t)] \qquad (9)$$

que es la expresión del teorema de convolución en el tiempo, el cual puede enunciarse del siguiente modo:

1. La transformada de Fourier de la convolución entre dos funciones en el dominio espacial o temporal es igual al producto de las transformadas de Fourier de cada una de ellas.

2. La transformada inversa de Fourier de un producto de dos funciones en el dominio de la frecuencia es igual a la convolución de sus transformadas inversas.

Esta propiedad es de vital importancia en el tratamiento digital de imágenes, ya que, como se dijo al principio, la operación de filtrado es en realidad una convolución entre la función filtro y la imagen original. Poder realizar productos en lugar de convoluciones es algo de gran interés por cuanto permite reducir considerablemente el número de operaciones que el sistema de tratamiento habrá de realizar, aun a costa de tener que efectuar operaciones auxiliares de transformación: una directa hacia el dominio de la frecuencia y otra inversa hacia el primitivo dominio espacial de la imagen (Beauchamp, 1987).

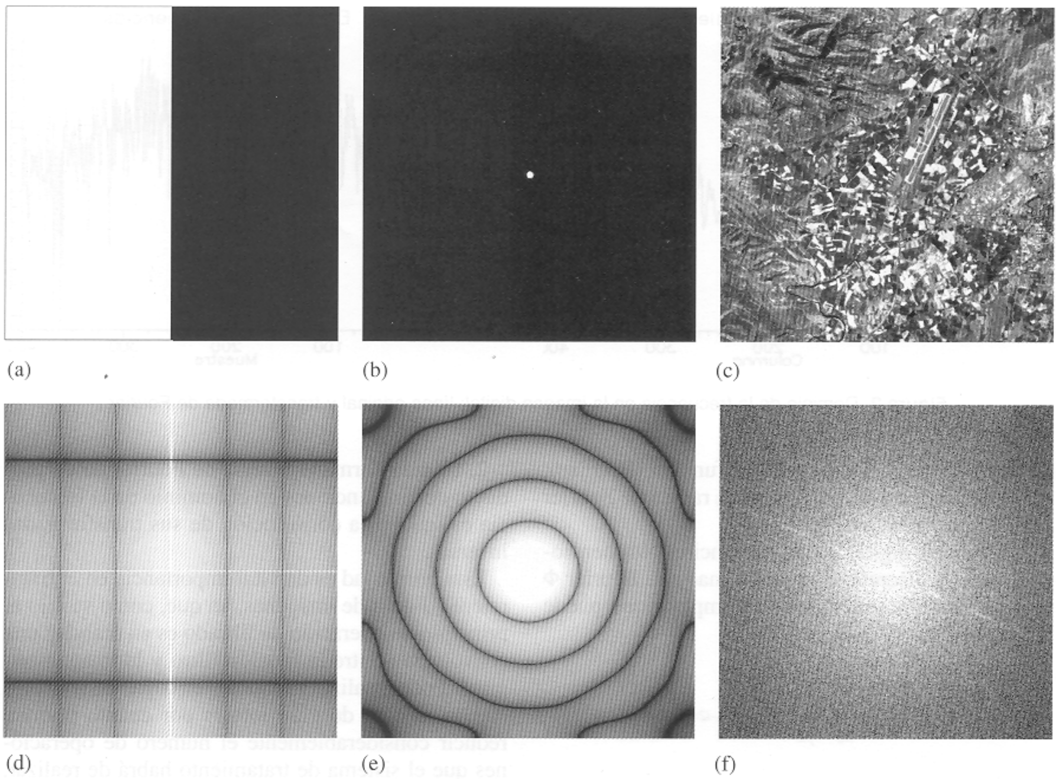

Figura 3. Imágenes originales (arriba) y sus transformadas rápidas de Fourier (debajo). Las transformadas *(d)* y (e) obedecen a patrones geométricos derivados de la simplicidad de *(a)* y *(b).* Esta última consiste en el suavizado de un impulso unitario. La imagen (c) corresponde al entorno de la ciudad de Vitoria-Gasteiz y su transformada *(f)* manifiesta una gran mezcla de frecuencias espaciales.

La operación de filtrado

El filtrado en el dominio de la frecuencia es muy sencillo, poderoso y flexible. Los filtros definidos en el dominio espacial en realidad tienen su repercusión en el de la frecuencia. De ello deriva la terminología empleada cuando se habla de filtros de paso alto o bajo. Los términos se refieren a que retienen bajas o altas frecuencias, explicando precisamente el efecto que causan en el espacio frecuencial de la imagen. Transformando la imagen del dominio espacial al de la frecuencia, la convolución entre w y *z* será sustituida por el producto:

$$Z'(\mathrm{r,s}) = W(\rho,\ \sigma) \cdot Z\,(\mathrm{r,s}) \qquad (10)$$

siendo *Z', W y* Z las FFT de la imagen filtrada *z',* la función filtro w y la imagen original *z,* respectivamente.

La alta frecuencia espacial está asociada a los cambios frecuentes de nivel digital de las celdillas. Son ejemplos de datos de alta frecuencia los bordes, las líneas y ciertos tipos de ruido en las imágenes. Por el contrario, las bajas frecuencias en la imagen son producidas por los cambios graduales en el brillo de la imagen. Utilizando la función de filtrado *W* en el dominio de la frecuencia, pueden diseñarse filtros de suavizado o de realce simplemente haciendo O dicha función para las frecuencias cuyos componentes deban ser eliminados e igualándola a 1 para aquellos otros que deban ser retenidos en la imagen final {Richards, 1994). Por 10 demás, el proceso de filtrado frecuencial en sí consistirá simplemente en aplicar como máscara la función de filtrado frecuencial *W* sobre la imagen Z en el dominio de la frecuencia.

Los filtros que producen suavizado de la imagen se denominan de paso bajo y los que, por el contrario, producen realce de bordes se denominan de paso alto, en atención a las modificaciones que producen en el espectro de magnitud de la imagen. Sin embargo, el filtrado en el dominio de la frecuencia permite, dejar ajenos al filtrado determinados intervalos de frecuencia espacial que convengan ser conservados como en la imagen original (Figura 4) o adoptar para la función de filtrado frecuencial valores intermedios entre 0 y l. Además es posible diseñar filtros de muesca *(notch filters)* que permiten omitir determinados intervalos de frecuencia en ciertas direcciones espaciales y no en otras (B.S. Consulting, 1996).

La Figura 4 muestra cómo dejando solamente pasar los componentes de bajas frecuencias mediante una plantilla de paso bajo (a) se obtiene un resultado (d) tanto más suave cuanto menor sea el radio de la abertura. El filtro de paso alto consiste en la operación contraria: dejar pasar los componentes de frecuencias que superan un cierto umbral y eliminar los de frecuencia inferior. Sin embargo, para lograr un resultado (e) que mantenga en cierta

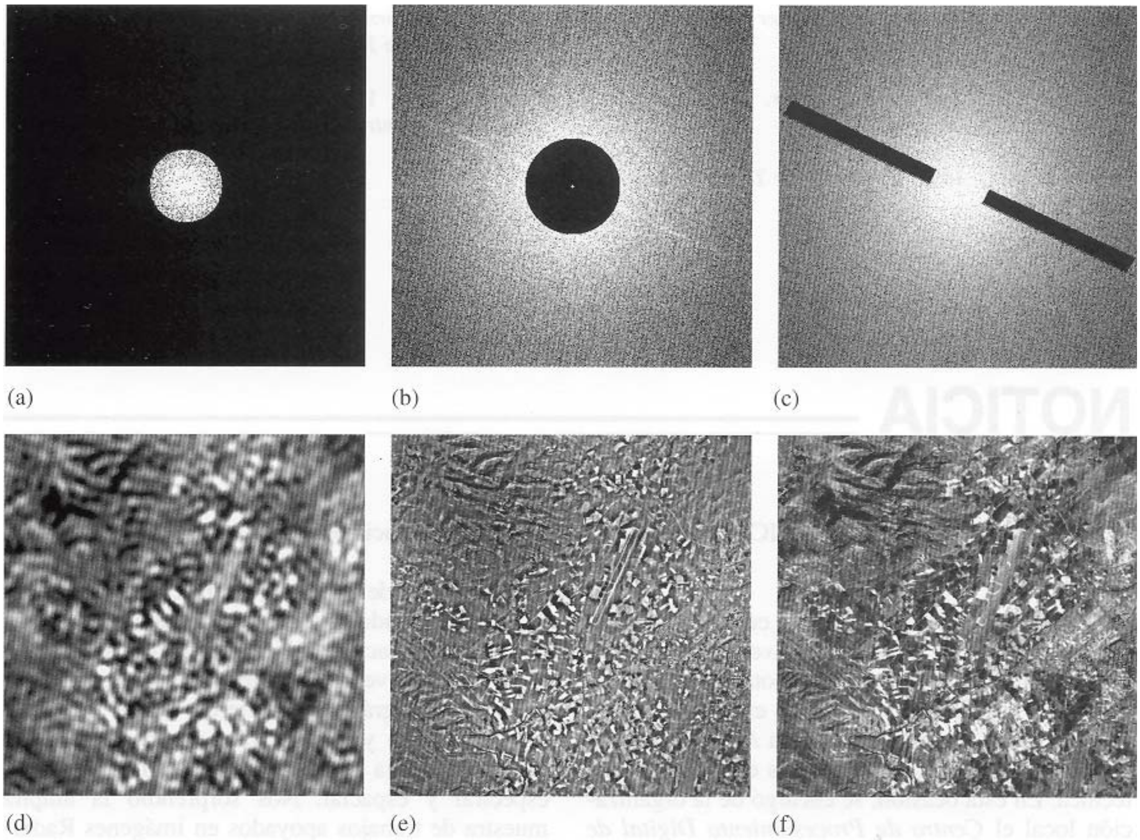

Figura 4. Producto de la función de filtrado por la imagen, ambos en el dominio de la frecuencia (arriba) y su transformada inversa al dominio espacial (debajo). *(a)* y *(d)* paso bajo, *(b)* y (e) corte de banda simulando un paso alto y (c) y *(f)* filtrado de muesca selectivo.

medida el aspecto de la imagen original sin una excesiva binarización se ha aplicado en realidad un filtro de corte de banda (b) consistente en eliminar las frecuencias comprendidas en un determinado intervalo. En este caso el límite superior de frecuencias eliminadas es similar al empleado como mínimo en el filtro de paso bajo, pero además se han respetado los componentes de frecuencias inferiores a 3 celdillas. La imagen resultante ofrece una información muy detallada de la estructura parcelaria de la zona 'de estudio, si bien ha sido necesario para ello suavizar las aristas de la función de filtrado frecuencial de modo que la transición del valor 0 al valor 1 de la máscara fuera gradual (conviene que el perfil de la función adopte siempre forma de campana en lugar de escalón) para evitar efectos indeseables. Por último, la flexibilidad del filtrado en el dominio de la frecuencia se pone de manifiesto en el caso de la plantilla (c), la cual actúa como una muesca que elimina ciertos intervalos frecuenciales relativamente amplios en una dirección bastante definida. Puede demostrarse que la transformada de Fourier de un impulso unitario es una constante y que, por tanto, la transformada inversa de Fourier de una constante es un impulso unitario. Por ello cabe esperar que la línea continua de valores claros que aparece en la FFT de la imagen original con una inclinación de unos 30º con respecto a la horizontal (Figura 3f) corresponda a algún accidente en la imagen que pueda asimilarse a un impulso unitario en esa dirección (y no necesariamente en otras). En efecto, el elemento causante de esa suma continua de frecuencias son las pistas de aterrizaje del aeropuerto de Foronda. En consecuencia, si se eliminan de la FFT esos componentes frecuenciales, presumiblemente deberán desaparecer de la imagen, como de hecho así ocurre en (f), solamente las pistas orientadas en la dirección perpendicular a la mencionada, en tanto que se mantienen intactas las de rodadura y el resto de la información de la imagen.

BIBLIOGRAFIA

BEAUCHAMP, K. G. 1987. Transforms for Engineers. A Guide to Signal Processing. Clarendon Press. Oxford.

BETTER SOLUTIONS CONSULTING. 1996. Envi User's Guide. Research Systems. Boulder, Colorado.

BRIGHAM, E.O. 1974. *The Fast Fourier Transform.* Prentice-Hall. New Jersey.

HSU, H.P. 1973. *Análisis de Fourier.* Fondo Educativo Interamericano. Bogotá.

PINILLA RUIZ, C. 1995. *Elementos de Teledetección.* RaMa. Madrid.

1997. *Transformaciones de Fourier en Teledetección.* Universidad de Jaén. Jaén. ,

RICHARDS, J. A. 1994. *Remote Sensing Digita image Analysis. An introduction.* SpringerVer1ag. Berlín.